Fundación POLAR

El mundo de la matemática

Inecuaciones

Puente sobre ría de Bilbao, España.

En múltiples construcciones se utilizan formas que se asemejan a las gráficas de expresiones algebraicas. En este puente peatonal podemos observar parábolas y rectas.

Los matemáticos observan las formas matemáticas y analíticas como un naturalista observa los seres que el estudia.

Jules Tannery
matemático francés (1848-1910).

Fundación POLAR *Últimas* **Noticias**

13

Últimas **Noticias**

EMPRESAS POLAR

Pensando
Ana María Pérez. Artista digital española

El mundo de las inecuaciones

Igualdades como las del recuadro son ecuaciones.

$$\frac{8}{7}x = 24$$
$$3x^2-\sqrt{2}=0$$
$$x-3y=\pi$$
$$\text{sen}(x) = 0{,}5$$
$$e^t = 1{,}5$$
$$x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$3x - 2y = 8$$

¿Qué ocurre si se sustituye el signo de igualdad "=" por uno de desigualdad: $<, \leq, >, \geq$?

< menor que
> mayor que
≤ menor o igual que
≥ mayor o igual que

Al reemplazar el signo de igualdad por uno de desigualdad obtenemos **INECUACIONES**. Por ejemplo:

$$\frac{8}{7}x < 24$$
$$\frac{8}{7}x \geq 24$$

lineales (en una variable)

$$x^2 - 5x + 6 \leq 0$$
$$3x^2 - \sqrt{2} > 0$$

cuadráticas (en una variable)

$$3x - 2y \leq 8$$
$$3x - 2y \geq 8$$

lineales (en dos variables)

Veamos algunas situaciones que conducen a inecuaciones en la recta y en el plano.

La ciencia son hechos; de la misma manera que las casas están hechas de piedras, la ciencia está hecha de hechos; pero un montón de piedras no es una casa y una colección de hechos no es necesariamente ciencia.

Un científico digno de este nombre, especialmente si es un matemático, experimenta en su labor la misma impresión que un artista; su placer es tan grande y de la misma naturaleza.

Henri Poincaré
Matemático francés
(1854-1912).

¿SABíAS QUE...?

Poincaré ha sido uno de los más grandes genios matemáticos de la humanidad. Fue un científico universal, el más brillante de los matemáticos de fines del siglo XIX y de los albores del siglo XX. En 1877 era ingeniero de minas, dedicándose a la matemática a partir de 1879, donde descolló en diversas áreas de la misma, así como en física, mecánica celeste, mecánica analítica, entre otras.
Uno de los rasgos más característicos de Poincaré era su visión filosófica y el don de exponer la matemática con una claridad excepcional. Sus obras más importantes de filosofía de la matemática y de la ciencia son: *La Ciencia y la Hipótesis* (1902), *El Valor de la Ciencia* (1905), *Ciencia y Método* (1908) y *Últimos Pensamientos* (1913).

Inecuaciones en la recta

Un fabricante de tornillos recibe un pedido de un cliente el cual estipula que los tornillos deben tener una longitud de 7,62 cm y son aceptables siempre y cuando el error no exceda al 5%.

El error ocurre tanto si el tornillo es más largo como si es más corto que lo deseado. Como el 5% de 7,62 cm es 0,381 cm entonces los tornillos son aceptados por el cliente cuando su longitud no es menor (o equivalentemente cuando es mayor o igual) que (7,62-0,381) cm. Asimismo, la longitud de los tornillos no debe exceder a –es decir, debe ser menor o igual– (7,62+0,381) cm.

La menor longitud aceptable: (7,62-0,381) cm = 7,239 cm.

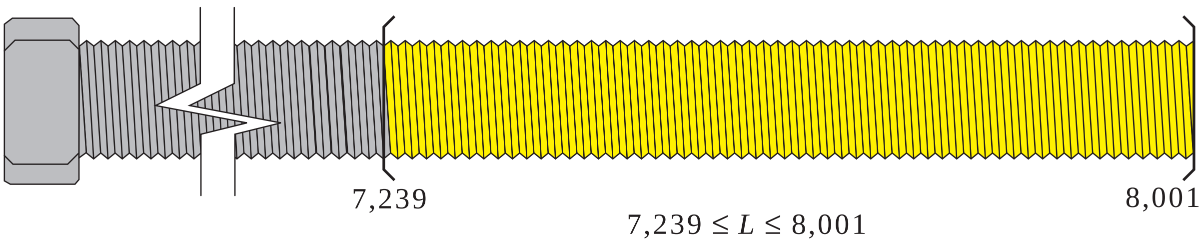
La mayor longitud aceptable: (7,62+0,381) cm = 8,001 cm.

Si representamos mediante la variable L la longitud (en centímetros) de los tornillos, lo anterior se expresa simbólicamente así:

$$L \geq 7{,}239 \text{ cm}$$

$$L \leq 8{,}001 \text{ cm}$$

Gráficamente estas inecuaciones se representan de la siguiente manera:



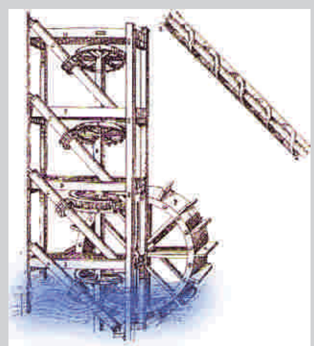
Esta expresión representa la combinación de las dos inecuaciones anteriores y determina el intervalo cerrado

[7,239 ; 8,001]


Apolonio de Perga (s. III a.C.)

¿SABÍAS QUE...?

Alrededor del año 200 a.C. un matemático griego, Apolonio de Perga, desarrolló la geometría de la hélice, y trazó las bases de la quinta y más joven de las máquinas simples: el tornillo. En cierto sentido, un tornillo no es una máquina "simple", ya que depende de otra máquina, una palanca, para su manejo.
Se atribuye al genio de Arquímedes de Siracusa (s. III a.C.) la invención del tornillo para achicar agua de las naves y elevar agua para riego de los campos de cultivo. Aún hoy se utiliza con ventaja, entre otras muchas cosas, para elevar grano a los silos de almacenaje o para elevar cemento en los trabajos de construcción.



Resolviendo inecuaciones

Cruz del Ávila
C.A. Electricidad de Caracas.

Ahora se plantea otra situación que conduce a inecuaciones.

En cierto año, en el mes de diciembre, al medir la temperatura en la ciudad de Caracas se obtuvo una mínima de 12 ºC y una máxima de 26 ºC. Es decir, la temperatura varió en el intervalo cerrado [12, 26]. Si medimos la temperatura en grados Fahrenheit, ¿cuál hubiese sido el intervalo de variación?

C = temperatura en grados centígrados

F = temperatura en grados Fahrenheit

Planteemos la ecuación que expresa grados centígrados en términos de grados Fahrenheit:

$C = \frac{5}{9}(F - 32)$

El intervalo cerrado [12, 26] se describe mediante las inecuaciones $12 \leq C$ y $C \leq 26$, lo cual se abrevia: $12 \leq C \leq 26$

$12 \leq \frac{5}{9}(F-32) \leq 26$

De aquí determinaremos el intervalo donde varía F

¿Cómo resolvemos este caso? Desarrollemos la **solución analítica**.

$12 \leq \frac{5}{9}(F - 32)$	Inecuaciones originales	$\frac{5}{9}(F - 32) \leq 26$
$\frac{9}{5}12 \leq F-32$	Se multiplicó cada término por $\frac{9}{5}$ que es positivo, luego no cambió el signo de desigualdad	$F-32 \leq \frac{9}{5}26$
$21,6 + 32 \leq F$	Se sumó 32 a cada término	$F \leq 46,8 + 32$
$53,6 \leq F$	La solución queda descrita por el intervalo cerrado [53,6 ; 78,8]	$F \leq 78,8$

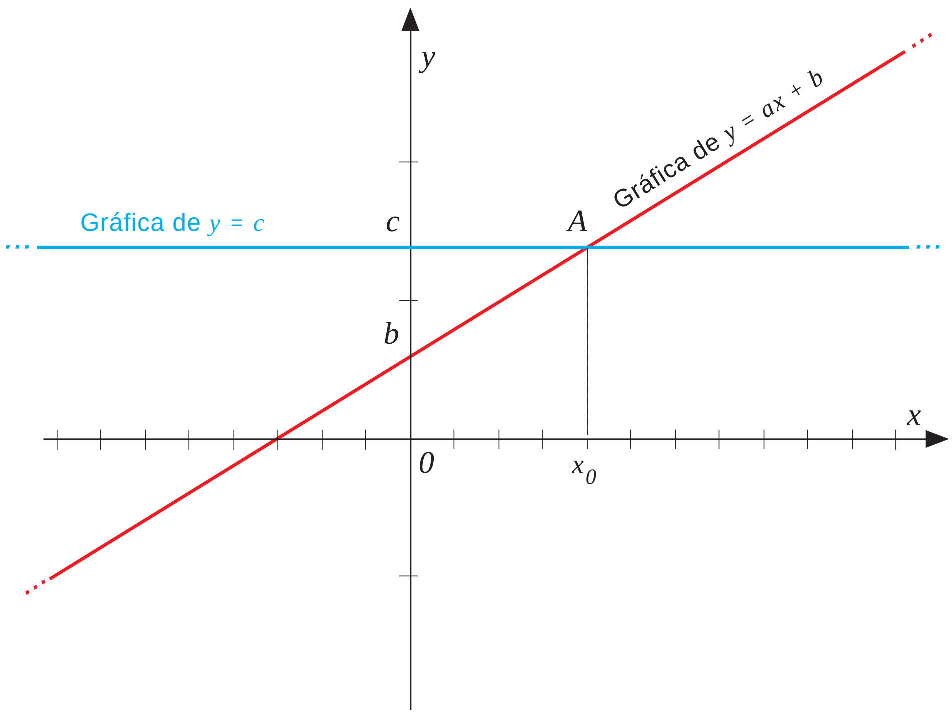
Pasos a seguir para resolver una inecuación lineal:

$c \leq ax + b$		Inecuación inicial	$ax + b \leq c$	
$c - b \leq ax$		Se sumó $-b$ a ambos miembros	$ax \leq c - b$	
Caso $a>0$ $\frac{c-b}{a} \leq x$	Caso $a<0$ $\frac{c-b}{a} \geq x$	Se dividió por $a \neq 0$ en ambos miembros	Caso $a>0$ $x \leq \frac{c-b}{a}$	Caso $a<0$ $x \geq \frac{c-b}{a}$
$[\frac{c-b}{a}, \infty)$	$(-\infty, \frac{c-b}{a}]$	La solución expresada mediante intervalos	$(-\infty, \frac{c-b}{a}]$	$[\frac{c-b}{a}, \infty)$

Solución geométrica de una inecuación lineal

Solución geométrica de la inecuación ax + b < c, con a > 0.

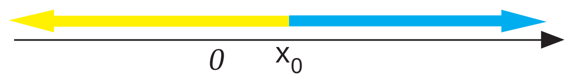
Para ello se representan en un sistema de coordenadas cartesianas las rectas de ecuaciones $y=ax+b$, $y=c$, las cuales se cortan en el punto A como muestra la gráfica.



Proyectando el punto A sobre el eje x se obtiene x_0 que es la abscisa de dicho punto.

Geométricamente o despejando x de la ecuación ax+b=c, se obtiene que $x_0=\frac{c-b}{a}$

Se tiene que x_0 divide al eje x en dos partes indicadas con las flechas amarilla y azul en la gráfica.



A la izquierda de $x_0=\frac{c-b}{a}$ ax+b<c, ya que la gráfica de la recta de ecuación y=ax+b está por debajo de la gráfica de la recta de ecuación y=c.	A la derecha de $x_0=\frac{c-b}{a}$ ax+b>c, ya que la gráfica de la recta de ecuación y=ax+b está por encima de la gráfica de la recta de ecuación y=c.
La solución es el intervalo abierto: $\left(-\infty, \frac{c-b}{a}\right)$	La solución es el intervalo abierto: $\left(\frac{c-b}{a}, +\infty\right)$

RETO:

Realiza el proceso anterior para el caso a < 0.

René Descartes
Filósofo, matemático y físico francés
(1596-1650)

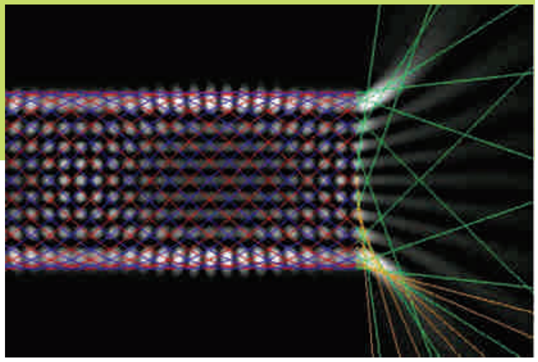
Interesante:

De igual forma que las identidades y las ecuaciones están asociadas al signo de igualdad, las inecuaciones se asocian a los signos de desigualdad que conocemos como mayor que o menor que. Las desigualdades y las inecuaciones reflejan situaciones en las que se sobrepasa o no se llega a un cierto valor conocido.

Las desigualdades desempeñan un importante papel en diversos problemas que se presentan en matemática, entre ellos en matemática aplicada, tales como la búsqueda de máximos o mínimos (problemas de optimización). Éstos conducen a desigualdades, lo cual expresa el hecho que la variable que se considera es menor (o mayor) o a lo sumo igual al valor máximo (o mínimo) que proporciona la solución.

Asimismo, las inecuaciones son el fundamento de un aspecto de las matemáticas denominado **programación lineal**; el cual forma parte de un conjunto de técnicas matemáticas que intentan obtener el mayor provecho posible de sistemas económicos, sociales y tecnológicos, cuyo funcionamiento se puede describir matemáticamente de modo adecuado.

Inecuaciones cuadráticas



Animación de un trabajo con ondas cuadráticas publicada en línea en: M. A. Alonso and G.W. Forbes, *Stable aggregates of flexible elements give a stronger link between rays and waves*, Opt. Exp. 10 (2002) 728-739.

Así como se puede hablar de ecuaciones lineales y cuadráticas, también para el caso de las inecuaciones existen estas distinciones.

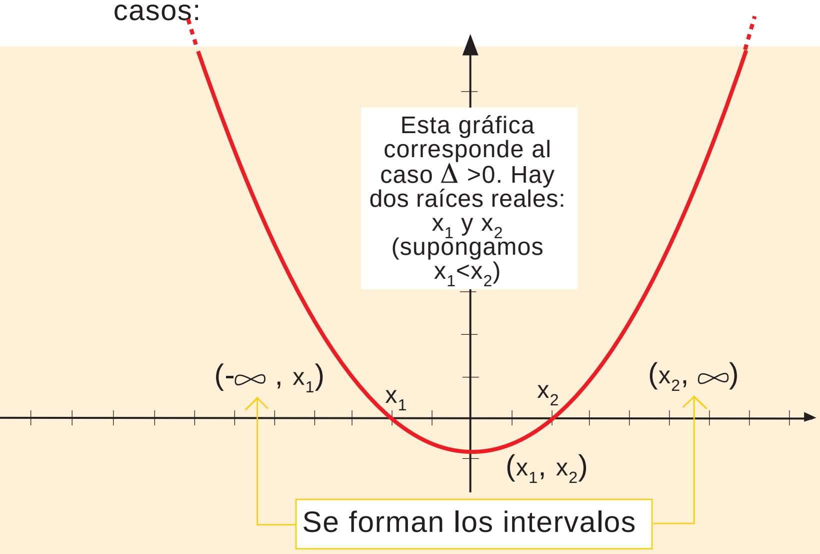
Tomemos por caso la inecuación cuadrática $ax^2 + bx + c > 0$, con $a > 0$.

¿Cómo se resuelve esta inecuación?

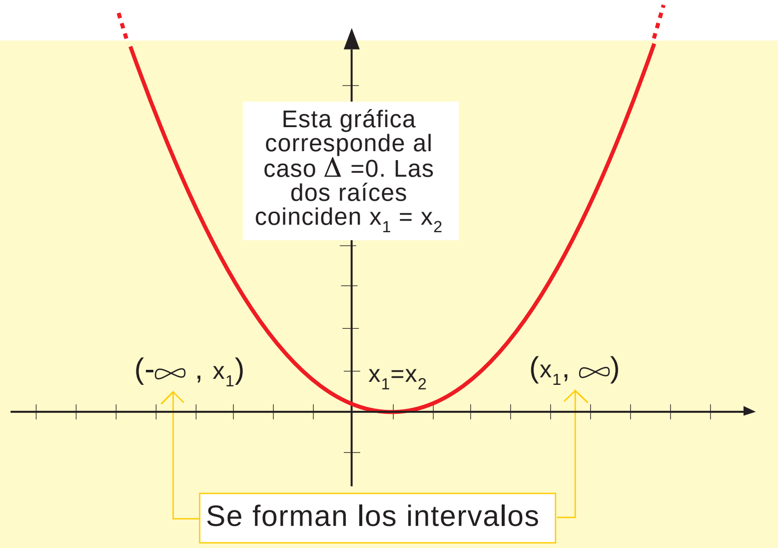
Hay dos procedimientos: el geométrico y el analítico.

Procedimiento geométrico

Para esto representamos la parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c$. Sea $\Delta = b^2 - 4ac$; se presentan tres casos:

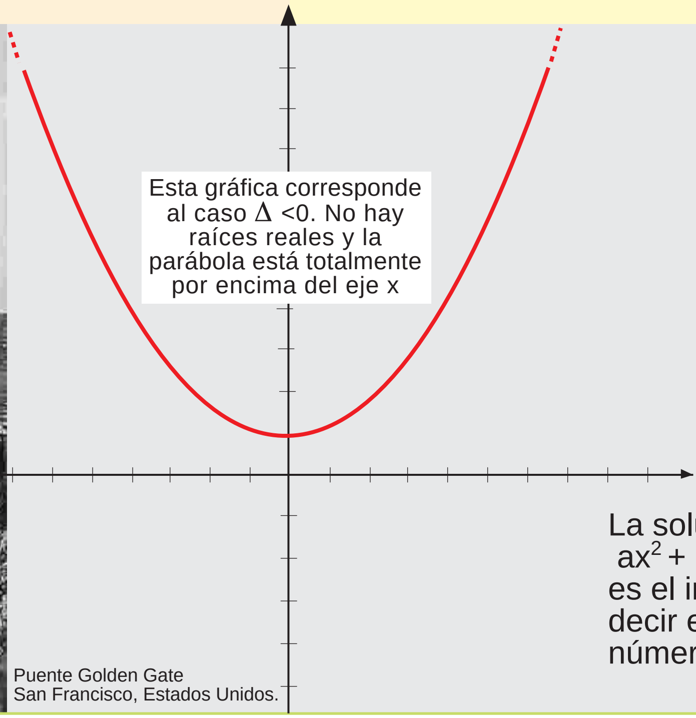


La solución de la inecuación $ax^2+bx+c>0$ es la unión de los intervalos donde la parábola está por encima del eje x. Esto es: $(-\infty, x_1) \cup (x_2 , +\infty)$.
En el intervalo (x_1, x_2) la parábola está debajo del eje x. Este intervalo es la solución de la inecuación $ax^2+bx+ c <0$.



La solución de la inecuación $ax^2+bx+c>0$ es la unión de los intervalos donde la parábola está por encima del eje x. Esto es: $(-\infty , x_1) \cup (x_1 , +\infty)$.
Esta unión corresponde al conjunto de los números reales excepto x_1.

Puente Golden Gate
San Francisco, Estados Unidos.



La solución de la inecuación $ax^2 + bx + c > 0$ es el intervalo $(-\infty, +\infty)$. Es decir el conjunto de los números reales.

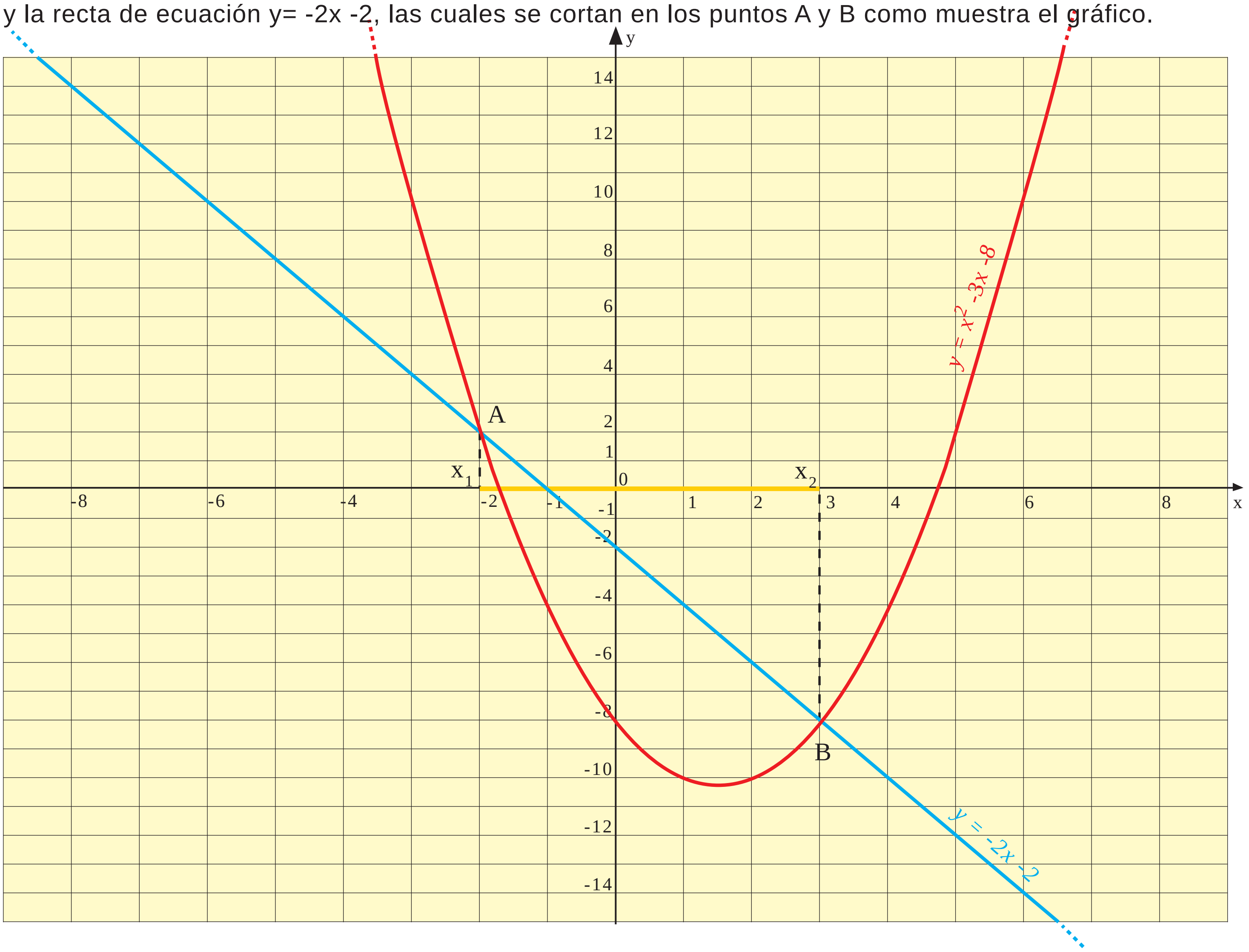
Resolviendo inecuaciones

Existen otras situaciones donde se requiere resolver inecuaciones. Por ejemplo, ¿para qué valor de x la gráfica de la parábola de ecuación $y=x^2 - 3x - 8$ está por debajo de la gráfica de la recta de ecuación $y=-2x-2$? Esto conduce a plantear la inecuación $x^2 - 3x - 8 \leq - 2x - 2$.

Para dar respuesta a esta interrogante se puede proceder analíticamente haciendo los cálculos respectivos o geométricamente.

Solución geométrica

Para ello se representa en un sistema de coordenadas cartesianas la parábola de ecuación $y=x^2 -3x -8$ y la recta de ecuación $y= -2x -2$, las cuales se cortan en los puntos A y B como muestra el gráfico.



Proyectando los puntos A y B sobre el eje x se obtienen los valores x_1 y x_2 los cuales "encierran" a todos los números x que satisfacen $x^2- 3x- 8 \leq -2x -2$, ya que en ese intervalo la gráfica de la recta está por encima de la gráfica de la parábola.

Para determinar x_1 y x_2 hay que encontrar los puntos A y B, por cuanto x_1 y x_2 son precisamente las abscisas de éstos. Nuevamente, esta última tarea se puede realizar gráfica o analíticamente.

Si optáramos por el método gráfico tendríamos que construir las gráficas lo más exactamente posible en un papel milimetrado y leer en la gráfica el valor correspondiente (en general se obtendría sólo un valor aproximado). También algunos paquetes informáticos permiten la lectura si uno coloca el cursor sobre el punto deseado.

Resolviendo inecuaciones


Puente sobre ría de Bilbao.

Si seguimos el proceso analítico hay que plantear la ecuación

$$x^2 - 3x - 8 = - 2x - 2$$

Lo anterior produce la ecuación cuadrática $x^2-x-6=0$, cuyas soluciones son:

$$x_1 = -2 \text{ y } x_2 = 3.$$

Éstos son los valores buscados, los cuales definen el intervalo cerrado $[x_1, x_2]=[-2, 3]$, solución de la inecuación.

Si hacemos la lectura gráfica observamos la similitud (en general en términos aproximados) de los resultados obtenidos por ambos métodos.

Solución analítica:

$x^2 -3x -8 \leq -2x -2$	Desigualdad inicial.
$(x^2 -3x -8)+2x \leq (-2x-2)+2x$	Sumándole 2x a ambos miembros de la inecuación.
$x^2 -x -8 \leq -2$	Efectuando la operación indicada.
$(x^2 -x -8) +2 \leq -2 +2$	Sumándole 2 a ambos miembros de la inecuación.
$x^2 -x -6 \leq 0$	Efectuando las operaciones indicadas.
$(x-3)(x+2) \leq 0$	Factorizando el miembro izquierdo.
$x-3 \geq 0$ y $x+2 \leq 0$ ó $x-3 \leq 0$ y $x+2 \geq 0$	Para que un producto de dos factores sea negativo uno de los factores debe ser negativo y el otro positivo. Para que sea nulo, por lo menos uno de los factores debe ser nulo
La solución es el intervalo cerrado: $[x_1, x_2]=[-2, 3]$	

RETO: Verifica que efectivamente ésta es la solución.

¿SABÍAS QUE...?

Para Miguel de Guzmán el impacto de la matemática en nuestro entorno cultural es evidente. Nuestros artefactos mecánicos, eléctricos, químicos, son leyes matemáticas encarnadas a través de la poderosa tecnología que disfrutamos. Nuestra arquitectura revela estructuras matemáticas subyacentes. Nuestros sistemas de organización manifiestan esquemas matemáticos que les sirven de soporte. Nuestros medios de información y de comunicación son cada vez más potentes gracias a los avances recientes de la informática, que aúna de forma espectacular los progresos matemáticos y tecnológicos.

Miguel de Guzmán fué presidente del Comité Mundial para la Enseñaza de la Matemática (ICMI, por sus siglas en inglés) y uno de los matemáticos más relevantes de habla hispana.


Miguel de Guzmán
Matemático español (1936-2004).

El juego y la belleza están en el origen de una gran parte de las matemáticas. Si los matemáticos de todos los tiempos se lo han pasado tan bien jugando y contemplando su juego y su ciencia, ¿por qué no tratar de aprenderla y comunicarla a través del juego y de la belleza?