Integración de funciones racionales, por fracciones parciales, cuando el denominador contiene factores cuadráticos

Ejercicios resueltos		
1. $\int \frac{1}{9x^4+x^2}dx$	**2.** $\int \frac{1}{x^3+x^2+x}dx$	**3.** $\int \frac{2x^3+9x}{(x^2+3)(x^2-2x+3)}dx$
4. $\int \frac{2x^2+3x+2}{x^3+4x^2+6x+4}dx$	**5.** $\int \frac{(5z^3-z^2+15z-10)dz}{(z^2-2z+5)^2}$	**6.** $\int \frac{3}{x^4+x^2+1}dx$

S o l u c i o n e s

1. $\int \frac{1}{9x^4+x^2}dx$

Solución - Juan Beltrán:

$$\int \frac{1}{9x^4+x^2}dx = \int \frac{1}{x^2(9x^2+1)}dx \qquad \{\text{factorizando el denominador}\}$$

Expresemos el integrando como una suma de fracciones parciales:

$$\frac{1}{x^2(9x^2+1)} \equiv \frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{Cx+D}{9x^2+1} \quad (1),$$

$\Rightarrow \quad 1 \equiv A(9x^2+1)+Bx(9x^2+1)+(Cx+D)x^2$

{multiplicando cada miembro de la identidad por el mínimo común denominador},

$\Rightarrow \quad 1 \equiv 9Ax^2+A+9Bx^3+Bx+Cx^3+Dx^2 \qquad$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow \quad 1 \equiv (9B+C)x^3+(9A+D)x^2+Bx+A \quad (2)$

Como (2) es una identidad, los coeficientes del miembro izquierdo deben ser iguales a los coeficientes correspondientes del miembro derecho. De tal manera que:

$9B+C=0 \quad (3)$

$9A+D=0 \quad (4)$

$B=0 \quad (5)$

$A=1 \quad (6)$

Sustituyendo (5) en (3) y efectuando las operaciones aritméticas, se obtiene:

$C=0 \quad (7)$

Sustituyendo (6) en (4) y efectuando las operaciones aritméticas, se obtiene:

$D=-9 \quad (8)$

Sustituyendo (5), (6), (7) y (8) en (1), se obtiene:

$$\frac{1}{x^2(9x^2+1)} \equiv \frac{1}{x^2}+\frac{0}{x}+\frac{0x-9}{9x^2+1} = \frac{1}{x^2}-\frac{9}{9x^2+1}$$

De tal manera que:

$$\int \frac{1}{9x^4+x^2}dx = \int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{9}{9x^2+1}\right)dx = \int \frac{1}{x^2}dx - \int \frac{9dx}{9x^2+1};$$

$$\int \frac{1}{9x^4+x^2}dx = -\frac{1}{x}-3\tan^{-1}3x+c.$$

2. $\int \frac{1}{x^3+x^2+x}dx$

Solución - Juan Beltrán:

$$\int \frac{1}{x^3+x^2+x}dx = \int \frac{1}{x(x^2+x+1)}dx \qquad \{\text{factorizando el denominador}\}$$

Expresemos el integrando como una suma de fracciones parciales:

$$\frac{1}{x(x^2+x+1)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} \qquad (1),$$

$\Rightarrow \quad 1 \equiv A(x^2+x+1)+(Bx+C)x$

{multiplicando cada miembro de la identidad por el mínimo común denominador},

$\Rightarrow \quad 1 \equiv Ax^2+Ax+A+Bx^2+Cx \qquad$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow \quad 1 \equiv (A+B)x^2+(A+C)x+A \qquad (2)$

Como (2) es una identidad, los coeficientes del miembro izquierdo deben ser iguales a los coeficientes correspondientes del miembro derecho. De tal manera que:

$A+B=0 \quad (3)$

$A+C=0 \quad (4)$

$A=1 \quad (5)$

Sustituyendo (5) en (3) y efectuando las operaciones aritméticas, se obtiene:

$B=-1 \quad (6)$

Sustituyendo (5) en (4) y efectuando las operaciones aritméticas, se obtiene:

$C=-1 \quad (7)$

Sustituyendo (5), (6), y (7) en (1), se obtiene:

$$\frac{1}{x(x^2+x+1)} \equiv \frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+x+1}$$

De tal manera que:

$$\int \frac{1}{x^3+x^2+x}dx = \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx = \ln x - \int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx + c,$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{1}{x^3+x^2+x}dx = \ln x - \frac{1}{2}\int \frac{2x+1+1}{x^2+x+1}dx + c = \ln x - \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}dx + c,$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{1}{x^3+x^2+x}dx = \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}(2x+1)}{3} + c;$$

$$\therefore \quad \int \frac{1}{x^3+x^2+x}dx = \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{\sqrt{3}}{3}\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}(2x+1)}{3} + c.$$

3. $\int \frac{2x^3+9x}{(x^2+3)(x^2-2x+3)}dx$

Solución - Juan Beltrán:

$$\int \frac{2x^3+9x}{(x^2+3)(x^2-2x+3)}dx$$

Expresemos el integrando como una suma de fracciones parciales:

$$\frac{2x^3+9x}{(x^2+3)(x^2-2x+3)} \equiv \frac{Ax+B}{x^2+3}+\frac{Cx+D}{x^2-2x+3} \quad (1),$$

$\Rightarrow \quad 2x^3+9x \equiv (Ax+B)(x^2-2x+3)+(Cx+D)(x^2+3)$

{multiplicando cada miembro de la identidad por el mínimo común denominador},

$\Rightarrow \quad 2x^3+9x \equiv Ax^3-2Ax^2+3Ax+Bx^2-2Bx+3B+Cx^3+3Cx+Dx^2+3D$

{destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow \quad 2x^3+9x \equiv (A+C)x^3+(-2A+B+D)x^2+(3A-2B+3C)x+(3B+3D) \quad (2)$

Como (2) es una identidad, los coeficientes del miembro izquierdo deben ser iguales a los coeficientes correspondientes del miembro derecho. De tal manera que:

$A+C=2 \quad (3)$

$-2A+B+D=0 \quad (4)$

$3A-2B+3C=9 \quad (5)$

$3B+3D=0 \Leftrightarrow B+D=0 \quad (6)$

Sustituyendo (6) en (4) y efectuando las operaciones aritméticas, se obtiene:

$A=0 \quad (7)$

Sustituyendo (7) en (3) y efectuando las operaciones aritméticas, se obtiene:

$C=2 \quad (8)$

Sustituyendo (7) y (8)en (5) y efectuando las operaciones aritméticas, se obtiene:

$B=-3/2 \quad (9)$

Sustituyendo (9) en (6) y efectuando las operaciones aritméticas, se obtiene:

$D=3/2 \quad (10)$

Sustituyendo (7), (8), (9) y (10) en (1), se obtiene:

$$\frac{2x^3+9x}{(x^2+3)(x^2-2x+3)} \equiv -\frac{3}{2(x^2+3)}+\frac{4x+3}{2(x^2-2x+3)}$$

De tal manera que:

$$\int \frac{2x^3+9x}{(x^2+3)(x^2-2x+3)}dx = -\frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+3}dx+\frac{1}{2}\int \frac{4x+3}{x^2-2x+3}dx;$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{2x^3+9x}{(x^2+3)(x^2-2x+3)}dx = -\frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}x}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(2\ln(x^2-2x+3)+\frac{7\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}\frac{\sqrt{2}(x-1)}{2}\right);$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{2x^3+9x}{(x^2+3)(x^2-2x+3)}dx = -\frac{\sqrt{3}}{2}\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}x}{3}+\ln(x^2-2x+3)+\frac{7\sqrt{2}}{4}\tan^{-1}\frac{\sqrt{2}(x-1)}{2}+c.$$

4. $\int \frac{2x^2+3x+2}{x^3+4x^2+6x+4}dx$

Solución - Juan Beltrán:

$$\int \frac{2x^2+3x+2}{x^3+4x^2+6x+4}dx = \int \frac{2x^2+3x+2}{(x^2+2x+2)(x+2)}dx \qquad \{\text{factorizando el denominador}\}$$

Expresemos el integrando como una suma de fracciones parciales:

$$\frac{2x^2+3x+2}{(x^2+2x+2)(x+2)} \equiv \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{C}{x+2} \qquad (1),$$

$\Rightarrow \quad 2x^2+3x+2 \equiv (Ax+B)(x+2)+C(x^2+2x+2)$

{multiplicando cada miembro de la identidad por el mínimo común denominador},

$\Rightarrow \quad 2x^2+3x+2 \equiv Ax^2+2Ax+Bx+2B+Cx^2+2Cx+2C$

{destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow \quad 2x^2+3x+2 \equiv (A+C)x^2+(2A+B+2C)x+(2B+2C) \qquad (2)$

Como (2) es una identidad, los coeficientes del miembro izquierdo deben ser iguales a los coeficientes correspondientes del miembro derecho. De tal manera que:

$A+C=2 \Leftrightarrow 2A+2C=4 \qquad (3)$

$2A+B+2C=3 \Leftrightarrow (2A+2C)+B=3 \qquad (4)$

$2B+2C=2 \Leftrightarrow B+C=1 \qquad (5)$

Sustituyendo (3) en (4) y efectuando las operaciones aritméticas, se obtiene:

$B=-1 \qquad (6)$

Sustituyendo (6) en (5) y efectuando las operaciones aritméticas, se obtiene:

$C=2 \qquad (7)$

Sustituyendo (7) en (3) y efectuando las operaciones aritméticas, se obtiene:

$A=0 \qquad (8)$

Sustituyendo (6), (7) y (8) en (1), se obtiene:

$$\frac{2x^2+3x+2}{(x^2+2x+2)(x+2)} \equiv -\frac{1}{x^2+2x+2} + \frac{2}{x+2}$$

De tal manera que:

$$\int \frac{2x^2+3x+2}{x^3+4x^2+6x+4}dx = -\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx + \int \frac{2}{x+2}dx = -\int \frac{1}{(x^2+2x+1)+1}dx + 2\ln|x+2| + c,$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{2x^2+3x+2}{x^3+4x^2+6x+4}dx = -\int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx + \ln(x+2)^2 + c;$$

$$\therefore \quad \int \frac{2x^2+3x+2}{x^3+4x^2+6x+4}dx = -\tan^{-1}(x+1) + \ln(x+2)^2 + c.$$

5. $\int \frac{(5z^3 - z^2 + 15z - 10)dz}{(z^2 - 2z + 5)^2}$

Solución - Juan Beltrán:

Expresemos el integrando como una suma de fracciones parciales:

$$\frac{5z^3 - z^2 + 15z - 10}{(z^2 - 2z + 5)^2} \equiv \frac{Ax + B}{(z^2 - 2z + 5)^2} + \frac{Cx + D}{z^2 - 2z + 5} \qquad (1)$$

Se multiplican ambos miembros de (1) por el mínimo común denominador $(z^2 - 2z + 5)^2$, y se simplifica:

$$5z^3 - z^2 + 15z - 10 \equiv Az + B + (Cz + D)(z^2 - 2z + 5) \qquad (2),$$

$$\Rightarrow \quad 5z^3 - z^2 + 15z - 10 \equiv Az + B + Cz^3 - 2Cz^2 + 5Cz + Dz^2 - 2Dz + 5D \qquad \{\text{destruyendo paréntesis}\},$$

$$\Rightarrow \quad 5z^3 - z^2 + 15z - 10 \equiv Cz^3 + (-2C + D)z^2 + (A + 5C - 2D)z + (B + 5D)$$

{asociando de una forma adecuada} (3)

Como (3) es una identidad, los coeficientes del miembro izquierdo deben ser iguales a los coeficientes correspondientes del miembro derecho. De tal menera que:

$C = 5 \qquad (4)$

$-2C + D = -1 \qquad (5)$

$A + 5C - 2D = 15 \qquad (6)$

$B + 5D = -10 \qquad (7)$

Sustituyendo (4) en (5) y operando aritméticamente, se obtiene:

$D = 9 \qquad (8)$

Sustituyendo (8) en (7), y operando aritméticamente, se obtiene:

$B = -55 \qquad (9)$

Sustituyendo (4) y (8) en (6), y operando aritméticamente, se obtiene:

$A = 8 \qquad (10)$

Sustituyendo (4), (8), (9) y (10) en (1), se obtiene:

$$\frac{5z^3 - z^2 + 15z - 10}{(z^2 - 2z + 5)^2} \equiv \frac{8z - 55}{(z^2 - 2z + 5)^2} + \frac{5z + 9}{z^2 - 2z + 5}$$

De tal manera que:

$$\int \frac{(5z^3 - z^2 + 15z - 10)dz}{(z^2 - 2z + 5)^2} = \int \frac{8z - 55}{(z^2 - 2z + 5)^2} dz + \int \frac{5z + 9}{z^2 - 2z + 5} dz,$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{(5z^3 - z^2 + 15z - 10)dz}{(z^2 - 2z + 5)^2} = 4\int \frac{2z - 55/4}{(z^2 - 2z + 5)^2} dz + \frac{5}{2}\int \frac{2z + 18/5}{z^2 - 2z + 5} dz,$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{(5z^3 - z^2 + 15z - 10)dz}{(z^2 - 2z + 5)^2} = 4\int \frac{2z - 2 - 47/4}{(z^2 - 2z + 5)^2} dz + \frac{5}{2}\int \frac{2z - 2 + 28/5}{z^2 - 2z + 5} dz,$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{(5z^3 - z^2 + 15z - 10)dz}{(z^2 - 2z + 5)^2} = 4\int \frac{2z - 2}{(z^2 - 2z + 5)^2} dz - 47\int \frac{1}{(z^2 - 2z + 5)^2} dz + \frac{5}{2}\int \frac{2z - 2}{z^2 - 2z + 5} dz + 14\int \frac{1}{z^2 - 2z + 5} dz,$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{(5z^3 - z^2 + 15z - 10)dz}{(z^2 - 2z + 5)^2} = -\frac{4}{z^2 - 2z + 5} - 47\int \frac{1}{(z^2 - 2z + 5)^2} + \frac{5}{2}\ln|z^2 - 2z + 5| + 14\int \frac{1}{z^2 - 2z + 5} dz,$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{(5z^3 - z^2 + 15z - 10)dz}{(z^2 - 2z + 5)^2} = -\frac{4}{z^2 - 2z + 5} - 47\left(\frac{1}{8}\frac{(z-1)}{(z^2 - 2z + 5)} + \frac{1}{16}\tan^{-1}\frac{z-1}{2}\right) + \frac{5}{2}\ln|z^2 - 2z + 5|$$
$$+ 14 \cdot \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{z-1}{2} + c,$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{(5z^3 - z^2 + 15z - 10)dz}{(z^2 - 2z + 5)^2} = -\frac{4}{z^2 - 2z + 5} - \frac{47}{8}\frac{(z-1)}{(z^2 - 2z + 5)} - \frac{47}{16}\tan^{-1}\frac{z-1}{2} + \frac{5}{2}\ln|z^2 - 2z + 5|$$
$$+ 7\tan^{-1}\frac{z-1}{2} + c,$$

$$\therefore \quad \int \frac{(5z^3 - z^2 + 15z - 10)dz}{(z^2 - 2z + 5)^2} = \frac{-32 - 47(z-1)}{8(z^2 - 2z + 5)} + \frac{-47 + 112}{16}\tan^{-1}\frac{z-1}{2} + \frac{5}{2}\ln|z^2 - 2z + 5| + c;$$

$$\therefore \quad \int \frac{(5z^3 - z^2 + 15z - 10)dz}{(z^2 - 2z + 5)^2} = \frac{15 - 47z}{8(z^2 - 2z + 5)} + \frac{65}{16}\tan^{-1}\frac{z-1}{2} + \frac{5}{2}\ln|z^2 - 2z + 5| + c.$$

6. $\int \frac{3}{x^4+x^2+1}dx$

Solución - Juan Beltrán:

$$\int \frac{3}{x^4+x^2+1}dx = \int \frac{3}{x^4+2x^2+1-x^2}dx = \int \frac{3}{(x^2+1)^2-x^2}dx = \int \frac{3}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}dx$$

Expresemos el integrando como una suma de fracciones parciales:

$$\frac{3}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)} \equiv \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1} \quad (1),$$

$\Rightarrow \quad 3 \equiv (Ax+B)(x^2-x+1)+(Cx+D)(x^2+x+1)$

{multiplicando cada miembro de la identidad por el mínimo común denominador},

$\Rightarrow \quad 3 \equiv Ax^3 - Ax^2 + Ax + Bx^2 - Bx + B + Cx^3 + Cx^2 + Cx + Dx^2 + Dx + D$

{destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow \quad 3 \equiv (A+C)x^3 + (-A+B+C+D)x^2 + (A-B+C+D)x + (B+D) \quad (2)$

Como (2) es una identidad, los coeficientes del miembro izquierdo deben ser iguales a los coeficientes correspondientes del miembro derecho. De tal manera que:

$A + C = 0 \quad (3)$

$-A + B + C + D = 0 \quad (4)$

$A - B + C + D = 0 \quad (5)$

$B + D = 3 \quad (6)$

Sustituyendo (3) en (5) y efectuando las operaciones aritméticas, se obtiene:

$-B + D = 0 \quad (7)$

Sumando (6) y (7) y despejando, se obtiene:

$D = \frac{3}{2} \quad (8)$

Sustituyendo (8)en (6) y efectuando las operaciones aritméticas, se obtiene:

$B = \frac{3}{2} \quad (9)$

Sustituyendo (6) en (4) y efectuando las operaciones aritméticas, se obtiene:

$A - C = 3 \quad (10)$

Sumando (3) y (10) y despejando, se obtiene:

$A = \frac{3}{2} \quad (11)$

Sustituyendo (11)en (3) y efectuando las operaciones aritméticas, se obtiene:

$C = -\frac{3}{2} \quad (9)$

De tal manera que:

$$\frac{3}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)} \equiv \frac{\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}}{x^2+x+1} + \frac{-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}}{x^2-x+1} = \frac{3}{2}\left[\frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{x-1}{x^2-x+1}\right],$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{3}{x^4+x^2+1}dx = \frac{3}{2}\int\left[\frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{x-1}{x^2-x+1}\right]dx = \frac{3}{2}\left[\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx - \int \frac{x-1}{x^2-x+1}dx\right], \ \ldots$$

$$\therefore \quad \int \frac{3}{x^4+x^2+1}dx = \frac{3}{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)\right].$$