Integración de funciones racionales, por fracciones parciales, cuando el denominador sólo tiene factores lineales

Ejercicios resueltos		
En los siguientes ejercicios, obtenga la integral indefinida:		
1. $\int \frac{x^2}{x^2+x-6}dx$	**2.** $\int \frac{5x-2}{x^2-4}dx$	**3.** $\int \frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}dx$
4. $\int \frac{3x^2-x+1}{x^3-x^2}dx$	**5.** $\int \frac{5x^2-11x+5}{x^3-4x^2+5x-2}dx$	**6.** $\int \frac{6x^2-2x-1}{4x^3-x}dx$
7. $\int \frac{dP}{P-P^2}$		

S o l u c i o n e s

1. $\int \frac{x^2}{x^2+x-6}dx$

Solución - Juan Beltrán:

$$\frac{x^2}{x^2+x-6} = 1 - \frac{x-6}{x^2+x-6} \Leftrightarrow 1 - \frac{x-6}{(x+3)(x-2)}$$

{expresando el integrando en la forma: parte entera-fracción propia. Y factorizando el denominador}

De tal manera que:

$$\int \frac{x^2}{x^2+x-6}dx = \int\left(1 - \frac{x-6}{(x+3)(x-2)}\right)dx = x - \int \frac{x-6}{(x+3)(x-2)}dx + c_1 \quad (\spadesuit)$$

Expresemos el integrando como una suma de fracciones parciales:

$$\frac{x-6}{(x+3)(x-2)} \equiv \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2} \quad (1)$$

Se multiplican ambos miembros de (1) por el mínimo común denominador $(x+3)(x-2)$, y se simplifica:

$$x-6 \equiv A(x-2) + B(x+3),$$

$\Rightarrow \quad x-6 \equiv Ax - 2A + Bx + 3B \quad$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow \quad x-6 \equiv (A+B)x + (-2A+3B) \quad$ {asociando de una forma adecuada} $\quad (2)$

Como (2) es una identidad, los coeficientes del miembro izquierdo deben ser iguales a los coeficientes correspondientes del miembro derecho. De tal menera que:

$$A + B = 1 \quad (3)$$

$$-2A + 3B = -6 \quad (4)$$

Multiplicamos (3) por 2, y la ecuación resultante la sumamos con la (4):

$$\begin{array}{r} 2A + 2B = 2 \\ \underline{-2A + 3B = -6} \end{array}$$

$$5B = -4 \Leftrightarrow B = -\frac{4}{5} \quad (5)$$

Sustituyendo (5) en (3) y operando aritméticamente, se obtiene:

$$A = \frac{9}{5} \quad (6)$$

Sustituyendo (5), (6) en (1), se obtiene:

$$\frac{x-6}{(x+3)(x-2)} \equiv \frac{9}{5(x+3)} - \frac{4}{5(x-2)}$$

De tala manera que:

$$\int \frac{x-6}{(x+3)(x-2)}dx = \frac{9}{5}\int \frac{1}{x+3}dx - \frac{4}{5}\int \frac{1}{x-2}dx,$$

$\therefore \quad \int \frac{x-6}{(x+3)(x-2)}dx = \frac{9}{5}\ln(x+3) - \frac{4}{5}\ln(x-2) + c_2 \quad (7)$

Sustituyendo (7) en ($\spadesuit$), se obtiene:

$$\int \frac{x^2}{x^2+x-6}dx = x - \left(\frac{9}{5}\ln(x+3) - \frac{4}{5}\ln(x-2) + c_2\right) + c_1;$$

$\therefore \quad \int \frac{x^2}{x^2+x-6}dx = x - \frac{9}{5}\ln(x+3) + \frac{4}{5}\ln(x-2) + c.$

2. $\int \frac{5x-2}{x^2-4}dx$

Solución - Juan Beltrán:

$$\int \frac{5x-2}{x^2-4}dx = \int \frac{5x-2}{(x+2)(x-2)}dx \qquad \{\text{factorizando el denominador}\}$$

Expresamos el integrando como una suma de fracciones parciales:

$$\frac{5x-2}{(x+2)(x-2)} \equiv \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} \qquad (1)$$

Se multiplican ambos miembros de (1) por el mínimo común denominador $(x+2)(x-2)$, y se simplifica:

$$5x-2 \equiv A(x-2) + B(x+2),$$

$$\Rightarrow \quad 5x-2 \equiv Ax - 2A + Bx + 2B \qquad \{\text{destruyendo paréntesis}\},$$

$$\Rightarrow \quad 5x-2 \equiv (A+B)x + (-2A+2B) \qquad \{\text{asociando de una forma adecuada}\} \quad (2)$$

Como (2) es una identidad, los coeficientes del miembro izquierdo deben ser iguales a los coeficientes correspondientes del miembro derecho. De tal menera que:

$$A + B = 5 \qquad (3)$$

$$-2A + 2B = -2 \qquad (4)$$

Multiplicamos (3) por 2, y la ecuación resultante la sumamos con la (4):

$$\begin{array}{r} 2A + 2B = 10 \\ \underline{-2A + 2B = -2} \\ 4B = 8 \Leftrightarrow B = 2 \quad (5) \end{array}$$

Sustituyendo (5) en (3) y operando aritméticamente, se obtiene:

$$A = 3 \qquad (6)$$

Sustituyendo (5), (6) en (1), se obtiene:

$$\frac{5x-2}{(x+2)(x-2)} \equiv \frac{3}{x+2} + \frac{2}{x-2}$$

De tala manera que:

$$\int \frac{5x-2}{x^2-4}dx = \int \frac{3}{x+2}dx + \int \frac{2}{x-2}dx;$$

$$\therefore \quad \int \frac{5x-2}{x^2-4}dx = 3\ln(x+2) + 2\ln(x-2) + c.$$

3. $\int \frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}dx$

Solución - Juan Beltrán:

$$\int \frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}dx = \int \frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)}dx \qquad \{\text{factorizando el denominador}\}$$

Expresemos el integrando como una suma de fracciones parciales:

$$\frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1} \qquad (1)$$

Se multiplican ambos miembros de (1) por el mínimo común denominador $x(x-2)(x+1)$,
y se simplifica:

$$4x-2 \equiv A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2),$$

$$\Rightarrow \quad 4x-2 \equiv Ax^2 - Ax - 2A + Bx^2 + Bx + Cx^2 - 2Cx \qquad \{\text{destruyendo paréntesis}\},$$

$$\Rightarrow \quad 4x-2 \equiv (A+B+C)x^2 + (-A+B-2C)x + (-2A) \qquad \{\text{asociando de una forma adecuada}\} \quad (2)$$

Como (2) es una identidad, los coeficientes del miembro izquierdo deben ser iguales a los coeficientes correspondientes del miembro derecho. De tal menera que:

$$A+B+C=0 \qquad (3)$$

$$-A+B-2C=4 \qquad (4)$$

$$-2A=-2 \Leftrightarrow A=1 \qquad (5)$$

Sustituyendo (5) en (4), como también (5) en (3) y operando aritméticamente, se obtiene:

$$B-2C=5 \qquad (6)$$

$$B+C=-1 \qquad (7)$$

Restando (6) de (7), se obtiene:

$$\begin{array}{r} B+C=-1 \\ -B+2C=-5 \\ \hline 3C=-6 \Leftrightarrow C=-2 \quad (8) \end{array}$$

Sustituyendo (8) en (6), y operando aritméticamente, se obtiene:

$$B=1 \qquad (9)$$

Sustituyendo (5), (8) y (9) en (1), se obtiene:

$$\frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)} \equiv \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+1}$$

De tal manera que:

$$\int \frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}dx = \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{x-2}dx - \int \frac{2}{x+1}dx,$$

$$\therefore \quad \int \frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}dx = \ln x + \ln(x-2) - 2\ln(x+1) + c.$$

4. $\int \frac{3x^2 - x + 1}{x^3 - x^2} dx$

Solución - Juan Beltrán:

$$\int \frac{3x^2 - x + 1}{x^3 - x^2} dx = \int \frac{3x^2 - x + 1}{x^2(x-1)} dx \qquad \{\text{factorizando el denominador}\}$$

Expresemos el integrando como una suma de fracciones parciales:

$$\frac{3x^2 - x + 1}{x^2(x-1)} \equiv \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} \qquad (1)$$

Se multiplican ambos miembros de (1) por el mínimo común denominador $x^2(x-1)$, y se simplifica:

$$3x^2 - x + 1 \equiv A(x-1) + Bx(x-1) + Cx^2,$$

$\Rightarrow \quad 3x^2 - x + 1 \equiv Ax - A + Bx^2 - Bx + Cx^2 \qquad$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow \quad 3x^2 - x + 1 \equiv (B + C)x^2 + (A - B)x - A \qquad$ {asociando de una forma adecuada} $\quad (2)$

Como (2) es una identidad, los coeficientes del miembro izquierdo deben ser iguales a los coeficientes correspondientes del miembro derecho. De tal menera que:

$B + C = 3 \qquad (3)$

$A - B = -1 \qquad (4)$

$-A = 1 \Leftrightarrow A = -1 \qquad (5)$

Sustituyendo (5) en (4) y operando aritméticamente, se obtiene:

$B = 0 \qquad (6)$

Sustituyendo (6) en (3) y operando aritméticamente, se obtiene:

$C = 3 \qquad (7)$

Sustituyendo (5), (6) y (7) en (1), se obtiene:

$$\frac{3x^2 - x + 1}{x^2(x-1)} \equiv \frac{-1}{x^2} + \frac{0}{x} + \frac{3}{x-1}$$

De tal manera que:

$$\int \frac{3x^2 - x + 1}{x^3 - x^2} dx = -\int \frac{1}{x^2} dx + 3\int \frac{1}{x-1} dx;$$

$$\therefore \quad \int \frac{3x^2 - x + 1}{x^3 - x^2} dx = \frac{1}{x} + 3\ln|x-1| + c.$$

5. $\int \frac{5x^2 - 11x + 5}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} dx$

Solución - Juan Beltrán:

$$\int \frac{5x^2 - 11x + 5}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} dx = \int \frac{5x^2 - 11x + 5}{(x-1)^2(x-2)} dx \qquad \{\text{factorizando el denominador}\}$$

Expresemos el integrando como una suma de fracciones parciales:

$$\frac{5x^2 - 11x + 5}{(x-1)^2(x-2)} \equiv \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} \qquad (1)$$

Se multiplican ambos miembros de (1) por el mínimo común denominador $x^2(x-1)$, y se simplifica:

$$5x^2 - 11x + 5 \equiv A(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)^2 \qquad (2),$$

$$\Rightarrow \quad 5x^2 - 11x + 5 \equiv Ax - 2A + Bx^2 - 3Bx + 2B + Cx^2 - 2Cx + C \qquad \{\text{destruyendo paréntesis}\},$$

$$\Rightarrow \quad 5x^2 - 11x + 5 \equiv (B + C)x^2 + (A - 3B - 2C)x + (-2A + 2B + C)$$

{asociando de una forma adecuada} (3)

Como (3) es una identidad, los coeficientes del miembro izquierdo deben ser iguales a los coeficientes correspondientes del miembro derecho. De tal menera que:

$$B + C = 5 \qquad (4)$$

$$A - 3B - 2C = -11 \qquad (5)$$

$$-2A + 2B + C = 5 \qquad (6)$$

Si en (2) se sustituye la x por 2, se obtiene:

$$5(2)^2 - 11(2) + 5 \equiv A(2-2) + B(x-1)(2-2) + C(2-1)^2;$$

$$\therefore \quad C = 3 \qquad (7)$$

Sustituyendo (7) en (4) y operando aritméticamente, se obtiene:

$$B = 2 \qquad (8)$$

Sustituyendo (7), (8) en (5), y operando aritméticamente, se obtiene:

$$A = 1 \qquad (9)$$

Sustituyendo (7), (8) y (9) en (1), se obtiene:

$$\frac{5x^2 - 11x + 5}{(x-1)^2(x-2)} \equiv \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2}$$

De tala manera que:

$$\int \frac{5x^2 - 11x + 5}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} dx = \int \frac{1}{(x-1)^2} dx + \int \frac{2}{x-1} dx + \int \frac{3}{x-2} dx,$$

$$\therefore \quad \int \frac{5x^2 - 11x + 5}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} dx = -\frac{1}{x-1} + 2\ln|x-1| + 3\ln|x-2| + c = -\frac{1}{x-1} + \ln(x-1)^2 + 3\ln|x-2| + c$$

6. $\int \frac{6x^2-2x-1}{4x^3-x}dx$

Solución - Juan Beltrán:

$$\int \frac{6x^2-2x-1}{4x^3-x}dx = \int \frac{6x^2-2x-1}{x(2x-1)(2x+1)}dx \qquad \{\text{factorizando el denominador}\}$$

Expresemos el integrando como una suma de fracciones parciales:

$$\frac{6x^2-2x-1}{x(2x-1)(2x+1)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{2x-1} + \frac{C}{2x+1} \qquad (1)$$

Se multiplican ambos miembros de (1) por el mínimo común denominador $x(2x-1)(2x+1)$, y se simplifica:

$$6x^2-2x-1 \equiv A(2x-1)(2x+1) + Bx(2x+1) + Cx(2x-1) \qquad (2),$$

$\Rightarrow \quad 6x^2-2x-1 \equiv 4Ax^2 - A + 2Bx^2 + Bx + 2Cx^2 - Cx \qquad \{\text{destruyendo paréntesis}\},$

$\Rightarrow \quad 6x^2-2x-1 \equiv (4A+2B+2C)x^2 + (B-C)x + (-A) \qquad \{\text{asociando de una forma adecuada}\} \qquad (3)$

Como (3) es una identidad, los coeficientes del miembro izquierdo deben ser iguales a los coeficientes correspondientes del miembro derecho. De tal menera que:

$$4A+2B+2C = 6 \Leftrightarrow 2A+B+C = 3 \qquad (4)$$

$$B-C = -2 \qquad (5)$$

$$-A = -1 \Leftrightarrow A = 1 \qquad (6)$$

Sustituyendo (6) en (4) y operando aritméticamente, se obtiene:

$$B+C = 1 \qquad (7)$$

Sumando, término a término, (5) y (7), se obtiene:

$$\begin{array}{l} B-C=-2 \\ \underline{B+C=\ \ 1} \\ 2B \qquad =-1 \Leftrightarrow B=-\frac{1}{2} \qquad (8) \end{array}$$

Sustituyendo (8) en (7), y operando aritméticamente, se obtiene:

$$C = \frac{3}{2} \qquad (9)$$

Sustituyendo (6), (8) y (9) en (1), se obtiene:

$$\frac{6x^2-2x-1}{x(2x-1)(2x+1)} \equiv \frac{1}{x} - \frac{1}{2(2x-1)} + \frac{3}{2(2x+1)}$$

De tala manera que:

$$\int \frac{6x^2-2x-1}{x(2x-1)(2x+1)}dx = \int \frac{1}{x}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{2x-1}dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{2x+1}dx,$$

$\Rightarrow \quad \int \frac{6x^2-2x-1}{4x^3-x}dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\ln|2x-1| + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\ln|2x+1| + c;$

$\therefore \quad \int \frac{6x^2-2x-1}{4x^3-x}dx = \ln|x| - \frac{1}{4}\ln|2x-1| + \frac{3}{4}\ln|2x+1| + c.$

7. $\int \frac{dP}{P-P^2}$

Solución - Juan Beltrán:

$$\int \frac{dP}{P-P^2} = \int \frac{dP}{P(1-P)} \qquad \{\text{factorizando el denominador}\}$$

Expresemos el integrando como una suma de fracciones parciales:

$$\frac{1}{P(1-P)} \equiv \frac{A}{P} + \frac{B}{1-P} \qquad (1)$$

Se multiplican ambos miembros de (1) por el mínimo común denominador $P(1-P)$, y se simplifica:

$$1 \equiv A(1-P) + BP \qquad (2),$$

$$\Rightarrow \quad 1 \equiv A - AP + BP \qquad \{\text{destruyendo paréntesis}\},$$

$$\Rightarrow \quad 1 \equiv (-A+B)P + (A) \qquad \{\text{asociando de una forma adecuada}\} \qquad (3)$$

Como (3) es una identidad, los coeficientes del miembro izquierdo deben ser iguales a los coeficientes correspondientes del miembro derecho. De tal menera que:

$$-A + B = 0 \qquad (4)$$

$$A = 1 \qquad (5)$$

Sustituyendo (5) en (4) y operando aritméticamente, se obtiene:

$$B = 1 \qquad (6)$$

Sustituyendo (5) y (6) en (1), se obtiene:

$$\frac{1}{P(1-P)} \equiv \frac{1}{P} + \frac{1}{1-P}$$

De tala manera que:

$$\int \frac{dP}{P-P^2} = \int \frac{1}{P}dP + \int \frac{1}{1-P}dP \Leftrightarrow \int \frac{dP}{P-P^2} = \int \frac{1}{P}dP - \int \frac{1}{P-1}dP,$$

$$\therefore \quad \int \frac{dP}{P-P^2} = \ln P - \ln(P-1) + c.$$

8. $\int \frac{3+v}{1-v^2}dv$

Solución - Juan Beltrán:

$$\int \frac{3+v}{1-v^2}dv = \int \frac{3+v}{(1-v)(1+v)}dv \qquad (1)$$

Expresemos el integrando en (1) como una suma de fracciones parciales:

$$\frac{3+v}{(1-v)(1+v)} \equiv \frac{A}{1-v} + \frac{B}{1+v} \qquad (\diamond) \Leftrightarrow 3+v \equiv A(1+v) + B(1-v) \Leftrightarrow 3+v \equiv A + Av + B - Bv,$$

$$\Rightarrow \quad 3+v \equiv (A+B) + (A-B)v \qquad (2)$$

Como (2) es una identidad, los coeficientes de los términos correspondientes deben ser iguales en ambos miembros; de tal modo que se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas:

$$\left.\begin{array}{ll} A+B=3 & (3) \\ A-B=1 & (4) \end{array}\right\}$$

$$2A = 4 \Leftrightarrow A = 2 \qquad (5),$$

$$\Rightarrow \quad 2 + B = 3 \Leftrightarrow B = 1 \qquad (6)$$

Sustituyendo (5) y (6) en ($\diamond$) y luego en (1), se obtiene:

$$\int \frac{3+v}{1-v^2}dv = \int \frac{2}{1-v} + \frac{1}{1+v}dv = \int \frac{1}{v+1}dv - \int \frac{2}{v-1}dv,$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{3+v}{1-v^2}dv = \ln|v+1| - 2\ln|v-1| + \ln C \Leftrightarrow \boxed{\int \frac{3+v}{1-v^2}dv = \ln \frac{C|v+1|}{(v-1)^2}}$$